

Bulles spéculatives et transmission d'information sur le marché d'un bien stockable

Speculative bubbles and on the transmission of information on the stockable commodity market

L. Broze, C. Gouriéroux et A. Szafarz

Volume 62, numéro 2, juin 1986

URI : <https://id.erudit.org/iderudit/601367ar>

DOI : <https://doi.org/10.7202/601367ar>

[Aller au sommaire du numéro](#)

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)

1710-3991 (numérique)

[Découvrir la revue](#)

Résumé de l'article

Nous étudions l'évolution du prix d'équilibre pour un bien stockable à titre spéculatif. L'impact des différents paramètres structurels sur l'amplitude des bulles spéculatives est mis en évidence. De plus le paramètre auxiliaire lié à la présence d'anticipations rationnelles est interprété comme une mesure de la confiance accordée par les agents à leurs propres anticipations. Lorsque les agents sont différenciés, notamment par le niveau de l'information dont ils disposent, nous montrons que tous les spéculateurs atteignant un seuil d'information forment les mêmes anticipations. De la sorte, on peut caractériser les cas où le marché est efficient.

Citer cet article

Broze, L., Gouriéroux, C. & Szafarz, A. (1986). Bulles spéculatives et transmission d'information sur le marché d'un bien stockable. *L'Actualité économique*, 62(2), 166–184. <https://doi.org/10.7202/601367ar>

BULLES SPÉCULATIVES ET TRANSMISSION D'INFORMATION SUR LE MARCHÉ D'UN BIEN STOCKABLE

L. BROZE*

C. GOURIÉROUX**

A. SZAFARZ*

Nous étudions l'évolution du prix d'équilibre pour un bien stockable à titre spéculatif. L'impact des différents paramètres structurels sur l'amplitude des bulles spéculatives est mis en évidence. De plus le paramètre auxiliaire lié à la présence d'anticipations rationnelles est interprété comme une mesure de la confiance accordée par les agents à leurs propres anticipations. Lorsque les agents sont différenciés, notamment par le niveau de l'information dont ils disposent, nous montrons que tous les spéculateurs atteignant un seuil d'information forment les mêmes anticipations. De la sorte, on peut caractériser les cas où le marché est efficient.

Speculative bubbles and on the transmission of information on the stockable commodity market. — We are interested in the evolution of the equilibrium price of a stockable commodity which can be demanded for speculative purposes. Using a model "à la Grossman", we determine all the possible price evolutions and we analyse the effect of the structural parameters on the growth of speculative bubbles. The model can be extended to the case of agents having diverse informations. It is shown that, if they have a minimal level of information, they form necessarily the same equilibrium price expectations. Then it is possible to characterize the cases where the market is efficient.

I — INTRODUCTION

Ce papier étudie l'évolution du prix d'équilibre pour un bien stockable (le café par exemple) pour lequel existent à la fois un marché

Nous remercions Marie-Christine Adam et André Sapir pour leurs commentaires intéressants sur une version précédente de cet article.

* Université Libre de Bruxelles.

** CEPREMAP.

spéculatif et un marché de consommation. Nous nous concentrons sur le versant spéculatif en adoptant une formalisation fort simplifiée pour le versant « consommation — production ». Le premier objectif est de décrire l'impact des diverses causes de variation du prix d'équilibre et, en particulier, de donner la forme explicite des « bulles spéculatives » possibles.

Le modèle que nous considérons s'inscrit dans la lignée des travaux de Grossman (1976), Danthine (1978), Kawai (1983), ... Il s'agit d'un modèle dynamique stochastique de type moyenne-variance. Les agents spéculateurs ont une aversion au risque et leur comportement est guidé par la maximisation d'une fonction d'utilité faisant intervenir des anticipations rationnelles.

Le phénomène de multiplicité d'équilibres dans le cadre des modèles linéaires à anticipations rationnelles est actuellement bien connu. Toutefois la résolution des modèles non linéaires reste difficile, tout particulièrement parce que les méthodes connues sont liées à la linéarité du modèle. Une première étape du présent article concerne précisément l'extension aux modèles moyenne-variance de la méthode de résolution proposée dans Broze, Gouriéroux et Szafarz (1985) pour les modèles linéaires à anticipations rationnelles. De l'expression ainsi obtenue pour les différentes trajectoires du prix à l'équilibre, nous déduisons ensuite diverses conséquences.

Ce papier comporte cinq sections. La section II présente le modèle étudié. La section III est relative à la résolution de ce modèle. Il y apparaît que l'infinité de solutions possibles peut être exprimée à l'aide d'un processus arbitraire qui s'interprète comme l'erreur de prévision sur le prix de l'actif risqué des agents spéculateurs. De plus la classe importante des solutions linéaires stationnaires peut être décrite à l'aide d'un paramètre réel.

Dans la section IV, nous proposons une description des bulles spéculatives basée sur l'écart entre le taux d'augmentation de prix de l'actif non risqué et celui du bien spéculatif. L'effet des divers paramètres structurels est analysé. De plus, un paramètre supplémentaire, lié à la présence d'anticipations rationnelles, est mis en évidence. Ce paramètre s'interprète en termes de niveau de confiance que les spéculateurs accordent à leurs propres anticipations.

La section V est consacrée à l'étude du modèle lorsque les agents possèdent des informations différenciées. Dans ce cas, nous montrons que la transmission d'information ne s'opère pas dans tous les cas. Plus précisément, pour bénéficier de cette transmission, les spéculateurs doivent a priori détenir une information minimale.

II – LE MODÈLE

On considère un marché où, à chaque date t , peuvent être échangés deux types d'actifs. Le premier est un bien stockable à titre spéculatif (le café par exemple). Il peut être acquis en début de période au prix p_t et revendu au prix p_{t+1} en fin de période. Ce prix p_{t+1} est évidemment inconnu au début de la période t et est dans la suite considéré comme aléatoire. Le second bien est un actif non risqué dont le prix est normalisé à 1 et qui rapporte à chaque période un intérêt constant connu r , $r > 0$. Ce bien correspond par exemple à de la monnaie déposée sur un compte sur livret.

X_t et M_t désignent respectivement les quantités demandées d'actif risqué et d'actif non risqué à la date t .

2.a – Fonction de demande d'un agent spéculateur

Pour définir la façon dont un agent répartit son portefeuille entre les deux types d'actifs, on suivra la démarche classique fondée sur l'optimisation d'une fonction d'utilité anticipée.

En fin de période $t-1$, l'agent possède un portefeuille composé des quantités M_{t-1} d'actif non risqué et X_{t-1} d'actif risqué. En début de période t , il réalise ses actifs et compose un nouveau portefeuille. Sa richesse disponible, évaluée en monnaie est : $W_t = p_t X_{t-1} + R M_{t-1}$ (où $R = 1 + r$) ; elle est égale au montant de la réalisation de ses titres. X_t et M_t désignent les quantités d'actifs qu'il décide de détenir. La nouvelle répartition doit satisfaire la contrainte de budget :

$$W_t = p_t X_t + M_t \quad (1)$$

Pour déterminer cette nouvelle composition de son portefeuille, l'agent est supposé avoir un comportement d'optimisation myope : il maximise son utilité anticipée à horizon 1. Sa fonction d'utilité, notée U , a pour seul argument la richesse présente. De plus on lui suppose une forme explicite de type exponentiel :

$$U(W_t) = - \exp(-\eta W_t), \quad \eta > 0$$

Le coefficient η mesure l'aversion absolue pour le risque. Comme, par hypothèse, ce coefficient est constant, la demande d'actif risqué sera indépendante de la richesse W .

Si l'agent dispose à la date t d'une information I_t , son comportement est résumé par :

$$\begin{cases} \text{Max } E(U(W_{t+1})|I_t) = E(U(p_{t+1} X_t + R M_t)|I_t) \\ X_t, M_t \\ \text{sous la contrainte : } W_t = p_t X_t + M_t \end{cases} \quad (2)$$

L'information dont dispose l'agent est supposée croissante dans le temps et contenant les valeurs des variables p_t , X_t , M_t .

La fonction d'utilité anticipée est alors égale à :

$$E[U(W_{t+1})|I_t] = E[-\exp - \eta(p_{t+1} X_t + R M_t) | I_t]$$

Conditionnellement à l'information I_t , R , X_t , M_t sont connus et l'utilité anticipée se calcule uniquement à l'aide de la loi conditionnelle de p_{t+1} sachant I_t . Si on suppose cette loi normale, l'utilité anticipée dépendra de cette loi par l'intermédiaire des deux premiers moments : moyenne conditionnelle $E(p_{t+1}|I_t)$ et variance conditionnelle $V(p_{t+1}|I_t)$. De manière plus précise, on a :

$$\begin{aligned} E[U(W_{t+1}) | I_t] &= -\exp \left\{ -\eta E(W_{t+1}|I_t) + \frac{\eta^2}{2} V(W_{t+1}|I_t) \right\} \quad (3) \\ &= -\exp \left\{ -\eta [E(p_{t+1}|I_t) X_t + R M_t] + \frac{\eta^2}{2} X_t^2 V(p_{t+1}|I_t) \right\} \end{aligned}$$

Tenant compte de la contrainte de budget (1), on a :

$$M_t = W_t - p_t X_t$$

et remplaçant dans l'équation (3), on obtient :

$$\begin{aligned} E[U(W_{t+1})|I_t] &\quad (4) \\ &= -\exp \left\{ -\eta [X_t (E(p_{t+1}|I_t) - R p_t) + R W_t] + \frac{\eta^2}{2} X_t^2 V(p_{t+1}|I_t) \right\} \end{aligned}$$

La condition du premier ordre fournit la quantité X_t d'actif risqué.

$$X_t = \frac{E(p_{t+1}|I_t) - R p_t}{\eta V(p_{t+1}|I_t)} \quad (5)$$

2.b – Conditions d'équilibre sur le marché de l'actif risqué

Dans un premier temps, nous supposons que la demande d'actif risqué émane de n agents ayant tous la même information I_t et la même aversion au risque $\tilde{\eta}$. Dans ce cas, la demande totale est identique à celle qui résulterait de la présence d'un seul agent disposant de l'information I_t et dont l'aversion au risque serait donnée par $\eta = \tilde{\eta}/n$.

La demande d'actif risqué est donc :

$$X_t = \frac{E(p_{t+1}|I_t) - R p_t}{\eta V(p_{t+1}|I_t)}$$

L'offre de ce bien est la somme du stock ancien X_{t-1} et de l'excès de la production courante Q_t sur la consommation courante C_t . Cet excès d'offre doit être déterminé au terme d'une description du comportement des consommateurs et des producteurs. Toutefois nous adopterons ici une représentation simplifiée à l'extrême pour l'offre excédentaire. Nous l'exprimons comme fonction linéaire du prix¹:

$$Q_t - C_t = \alpha p_t + u_t, \alpha > 0 \quad (6)$$

où $u = (u_t)$ est un processus stochastique exogène traduisant notamment l'incertitude liée à la production. Cette modélisation est particulièrement appropriée dans le cas de biens agricoles stockables pour lesquels la quantité produite Q_t dépend des conditions climatiques.

La condition d'équilibre en présence de stocks spéculatifs s'écrit donc :

$$X_t = X_{t-1} + \alpha p_t + u_t$$

ou, de manière équivalente :

$$\frac{E(p_{t+1}|I_t) - R p_t}{\eta V(p_{t+1}|I_t)} = \frac{E(p_t|I_{t-1}) - R p_{t-1}}{\eta V(p_t|I_{t-1})} + \alpha p_t + u_t \quad (7)$$

C'est cette condition que nous prenons comme base de l'étude qui suit.

III – ÉVOLUTION DES PRIX

Nous allons commencer par déterminer les évolutions de prix (p_t) compatibles avec la condition d'équilibre (7). Pour cela nous utilisons la démarche générale de résolution de modèles à anticipations rationnelles proposée par Broze, Gouriéroux et Szafarz (1985). Nous supposons que l'information I_t contient les valeurs présentes et passées du processus exogène $u = (u_t)$ et est croissante avec t .

Le résultat suivant décrit l'ensemble des solutions de l'équation (7):

PROPRIÉTÉ 1 Les évolutions de prix $p = (p_t)$ satisfaisant la condition d'équilibre (7) sont obtenues en résolvant l'équation de récurrence :

$$\frac{p_{t+1} - \epsilon_{t+1} - R p_t}{\eta E(\epsilon_{t+1}^2|I_t)} = \frac{p_t - \epsilon_t - R p_{t-1}}{\eta E(\epsilon_t^2|I_{t-1})} + \alpha p_t + u_t \quad (8)$$

pour tous les choix possibles de $\epsilon = (\epsilon_t)$ comme différence de martingale.

1. Cette hypothèse n'est évidemment pas satisfaisante en pratique. Elle a cependant le mérite de la simplicité. Une description plus réaliste comporterait au moins une anticipation du type $E[p_t|I_{t-1}]$ formée par les producteurs. Dans ce cas, la méthode de résolution resterait encore applicable mais l'expression des solutions serait alourdie.

Rappelons à ce niveau qu'une différence de martingale ϵ est un processus tel que $E(\epsilon_t | I_{t-1}) = 0 \forall t$, c'est-à-dire orthogonal au passé.

Démonstration de la propriété 1

i) *Condition nécessaire*

Il suffit de remarquer que l'erreur de prévision à l'horizon 1 sur le prix $\epsilon_t = p_t - E(p_t | I_{t-1})$, est une différence de martingale, puis de remplacer dans la condition d'équilibre (7) $E(p_t | I_{t-1})$ par $p_t - \epsilon_t$ et la variance conditionnelle $V(p_t | I_t) = E([p_t - E(p_t | I_{t-1})]^2 | I_{t-1})$ par $E(\epsilon_t^2 | I_{t-1})$.

ii) *Condition suffisante*

Inversement considérons une solution de (8) associée à une différence de martingale quelconque $\epsilon = (\epsilon_t)$. Prenons l'espérance conditionnelle à I_t de chaque membre de l'équation (8), nous obtenons :

$$\frac{E(p_{t+1} | I_t) - R p_t}{\eta E(\epsilon_{t+1}^2 | I_t)} = \frac{p_t - \epsilon_t - R p_{t-1}}{\eta E(\epsilon_t^2 | I_{t-1})} + \alpha p_t + u_t$$

Retranchant de l'équation (8), nous en déduisons :

$$\frac{p_{t+1} - \epsilon_{t+1} - E(p_{t+1} | I_t)}{\eta E(\epsilon_{t+1}^2 | I_t)} = 0$$

c'est-à-dire : $\epsilon_{t+1} = p_{t+1} - E(p_{t+1} | I_t)$.

Il suffit alors de remplacer ϵ_t par cette expression dans (8) pour retrouver la condition d'équilibre (7).

Q.E.D.

La propriété 1 met en évidence le phénomène de multiplicité de solutions. Chaque solution correspond au choix d'un processus ϵ qui s'interprète comme l'erreur de prévision à l'horizon 1 : $\epsilon_t = p_t - E(p_t | I_{t-1})$. De plus, un équilibre ne peut être entièrement déterminé par la connaissance du passé des prix p_t , $t \leq t_0$. En effet, même si ces valeurs passées sont connues, ce qui implique que ϵ_t , $t \leq t_0$ est connu, les valeurs futures ϵ_{t_0+1} , ϵ_{t_0+2} , ... de la différence de martingale sont arbitraires. Il y a ainsi une infinité d'évolutions de prix d'équilibre compatibles avec un passé donné.

De façon à illustrer ce point, supposons que le marché est non spéculatif jusqu'à une certaine date t_0 (incluse), et qu'ensuite la spéculation fasse son apparition. Du point de vue mathématique, ceci revient à supposer que les prix coïncident, jusqu'à la date t_0 comprise, avec le prix d'équilibre en absence de stocks spéculatifs : $p_t^0 = -u_t/\alpha$. Prenons le cas où le processus exogène (u_t) est une suite de variables indépendantes de moyenne m_t , de variance σ_t^2 . Le prix de la date p_{t_0+1} satisfait :

$$\frac{p_{t_0+1} - \epsilon_{t_0+1} + \frac{R}{\alpha} u_{t_0}}{\eta E(\epsilon_{t_0+1}^2 | I_{t_0})} = \frac{-\frac{m_{t_0}}{\alpha} + \frac{R}{\alpha} u_{t_0-1}}{\eta \sigma_{t_0}^2 / \alpha^2}$$

$$\text{Donc: } p_{t_0+1} = \epsilon_{t_0+1} - \frac{R}{\alpha} u_{t_0} + \frac{\alpha E(\epsilon_{t_0+1}^2 | I_{t_0})}{\sigma_{t_0}^2} [-m_{t_0} + R u_{t_0-1}]$$

Il y a autant de choix possibles de ce prix que de choix possibles d'une variable ϵ_{t_0+1} orthogonale au passé.

Remarquons qu'il n'existe pas de choix de ϵ_{t_0+1} permettant d'obtenir $p_{t_0+1} = -u_{t_0+1}/\alpha$ et de satisfaire simultanément la contrainte d'orthogonalité au passé. On s'écarte donc systématiquement de la trajectoire d'équilibre correspondant à l'absence de stocks spéculatifs.

Observons que l'expression de l'ensemble des équilibres possibles fait intervenir une différence de martingale arbitraire et qu'en conséquence cet ensemble ne peut être décrit à l'aide d'un nombre fini de paramètres réels. C'est pourquoi, dans la section suivante nous restreindrons l'étude à une classe de solutions, mais choisie suffisamment large pour permettre d'observer le phénomène de bulle spéculative.

Enfin, il est important de noter que le développement qui a conduit à la propriété 1 ne fait intervenir aucune hypothèse quant à la structure du processus exogène u . De plus, nous ne supposons pas que la variance conditionnelle $V[p_{t+1} | I_t]$ est constante. Cette dernière condition, souvent utilisée (voir par exemple Kawai (1983)) permet de ramener l'étude du modèle moyenne-variance à celle d'un modèle linéaire, ce qui élimine précisément la spécificité du modèle considéré. Afin de montrer que l'hypothèse selon laquelle $V[p_{t+1} | I_t]$ est constante et restrictive, considérons le cas simple où le processus exogène u est une suite de variables indépendantes de même loi, de moyenne m et de variance σ^2 et posons :

$$\epsilon_t = f(t) (u_t - m)$$

où f est une fonction (déterministe) quelconque.

Le processus ϵ ainsi défini est une différence de martingale (avec I_t engendré par u_t, u_{t-1}, \dots). Nous pouvons alors choisir ces processus comme erreurs de prévision et obtenir des solutions telles que :

$$\begin{aligned} V[p_{t+1} | I_t] &= E[\epsilon_{t+1}^2 | I_t] \\ &= E[f^2(t+1) (u_{t+1} - m)^2 | I_t] \\ &= f^2(t+1) \sigma^2 \end{aligned}$$

Ainsi, chaque fonction f conduit à une solution distincte dont la variance conditionnelle dépend évidemment de t .

D'autre part, même lorsque la variance conditionnelle $V[p_{t+1}|I_t]$ est constante (sous l'hypothèse de stationnarité par exemple), sa valeur est fixée par le modèle (p_t étant endogène) et on ne peut la considérer comme un simple paramètre. La section suivante illustrera cette remarque.

IV – BULLES SPÉCULATIVES

Considérons un instant initial choisi pour la facilité en $t = 0$. La détention à cet instant d'une unité d'actif non risqué génère en l'absence d'échange entre 0 et t une richesse certaine R' à la date t ; la détention d'une unité d'actif risqué donne lieu elle à une richesse aléatoire p_t . On s'attend évidemment à ce que p_t/p_0 soit supérieur à R' dans la mesure où l'agent qui investit en actif risqué bénéficie « d'une prime de risque ». De plus le fait que les anticipations de l'agent influent sur la formation du prix p_t devrait entraîner une prime d'autant plus forte que son aversion au risque est grande.

Nous allons essayer de vérifier cette intuition en supposant que le processus exogène admet une représentation moyenne mobile asymptotiquement stationnaire :

$$u_t = m + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \tilde{\eta}_{t-i} = m + A(B) \tilde{\eta}_t, \quad \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i| < \infty, \alpha_0 = 1 \quad (9)$$

où m désigne la moyenne de u_t pour tout $t \geq 0$ et vaut zéro pour $t < 0$, ($\tilde{\eta}_t$) est un bruit blanc indépendant de variance σ^2 . L'information disponible est prise égale à $I_t = (\tilde{\eta}_t, p_t, \tilde{\eta}_{t-1}, p_{t-1}, \dots)$.

De manière à simplifier l'étude, on se restreint aux solutions admettant une représentation du type :

$$\begin{aligned} p_t &= \mu_t + \psi(B) \tilde{\eta}_t \\ &= \mu_t + \psi_0 \tilde{\eta}_t + \psi_1 \tilde{\eta}_{t-1} + \dots + \psi_i \tilde{\eta}_{t-i} \dots \end{aligned} \quad (10)$$

où μ_t désigne la moyenne de p_t et où ($\tilde{\eta}_t$) est le processus d'innovation associé à l'exogène (u_t).

La classe de solutions ainsi retenue est fort large dans la mesure où elle ne comporte aucune restriction sur la moyenne du prix p_t . En fait, les contraintes imposées à la partie aléatoire correspondent simplement aux hypothèses classiques de stationnarité et de linéarité. Ceci permet d'obtenir une description paramétrique des équilibres admissibles.

PROPRIÉTÉ 2 : Les trajectoires d'équilibre admettant une représentation du type :

$$p_t = \mu_t + \psi(B) \tilde{\eta}_t$$

sont obtenues pour :

$$\psi(B) = \frac{\psi_0 - \psi_0 B + BA(B) \eta \psi_0^2 \sigma^2}{1 - [1 + R + \alpha \eta \psi_0^2 \sigma^2] B + R B^2}$$

et une suite (μ_t) satisfaisant :

$$\mu_{t+1} - \mu_t (R + 1 + \alpha \eta \psi_0^2 \sigma^2) + R \mu_{t-1} = \eta \psi_0^2 \sigma^2 m t \geq 0$$

où, dans ces expressions, ψ_0 est un réel arbitraire.

Preuve

La forme retenue des solutions implique que :

$$\epsilon_t = p_t - E(p_t | I_{t-1}) = \psi_0 \tilde{\eta}_t$$

et donc que $E(\epsilon_{t+1}^2 | I_t) = \psi_0^2 \sigma^2$.

Remplaçant dans la condition (8), nous obtenons :

$$\frac{p_{t+1} - \psi_0 \tilde{\eta}_{t+1} - R p_t}{\eta \psi_0^2 \sigma^2} = \frac{p_t - \psi_0 \tilde{\eta}_t - R p_{t-1}}{\eta \psi_0^2 \sigma^2} + \alpha p_t + u_t$$

ou encore en séparant les parties déterministes et moyennes mobiles :

$$\begin{aligned} \psi(B) \tilde{\eta}_{t+1} - \psi_0 \tilde{\eta}_{t+1} - R \psi(B) \tilde{\eta}_t &= \psi(B) \tilde{\eta}_t - \psi_0 \tilde{\eta}_t - R \psi(B) \tilde{\eta}_{t-1} \\ &\quad + \eta \psi_0^2 \sigma^2 [\alpha \psi(B) \tilde{\eta}_t + A(B) \tilde{\eta}_t] \end{aligned}$$

et $\mu_{t+1} - R \mu_t = \mu_t - R \mu_{t-1} + \eta \alpha \psi_0^2 \sigma^2 \mu_t + \eta \psi_0^2 \sigma^2 m$.

Ces deux relations se simplifient en :

$$\psi(B) = \frac{\psi_0 - \psi_0 B + \eta \psi_0^2 \sigma^2 B A(B)}{1 - [1 + R + \alpha \eta \psi_0^2 \sigma^2] B + R B^2}$$

$$\mu_{t+1} - \mu_t (1 + R + \alpha \eta \psi_0^2 \sigma^2) + R \mu_{t-1} = \eta \psi_0^2 \sigma^2 m.$$

Q.E.D.

L'idée d'une croissance des prix supérieure à R' peut apparaître à deux niveaux, d'abord par l'intermédiaire de la moyenne μ_t , mais aussi au travers de la partie aléatoire $\psi(B) \tilde{\eta}_t$. Il est en effet possible que la série $\psi(B)$ s'écrive sous la forme de fraction rationnelle $\theta(B)/\phi(B)$ avec un dénominateur admettant une racine de module inférieur à $1/R$.

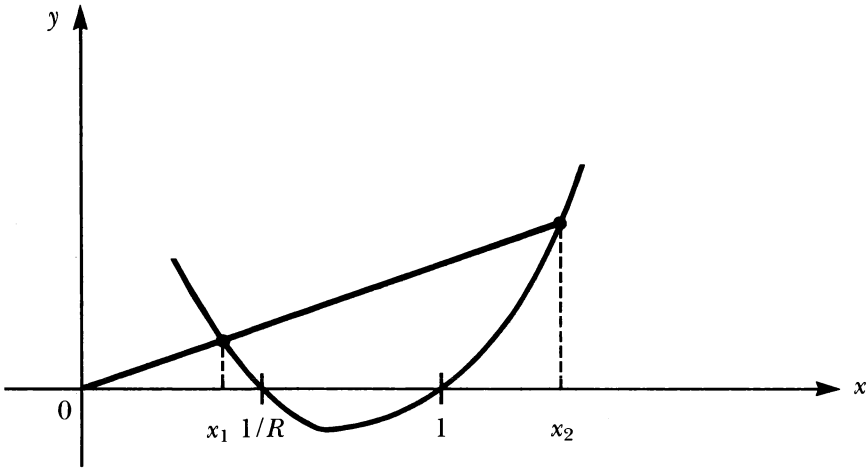
En conséquence, pour étudier le caractère « explosif » des trajectoires d'équilibre, nous devons, aussi bien pour la partie déterministe μ_t que pour la partie aléatoire $\psi(B) \tilde{\eta}_t$, chercher les solutions de l'équation :

$$R x^2 - (1 + R + \alpha \eta \psi_0^2 \sigma^2) x + 1 = 0$$

Cette équation s'écrit encore :

$$\alpha \eta \psi_0^2 \sigma^2 x = (1 - x) (1 - R x)$$

Comme $\eta > 0$, $R \geq 1$ et $\alpha > 0$, les courbes d'équations respectives : $y = \alpha \eta \psi_0^2 \sigma^2 x$ et $y = (1 - x)(1 - R x)$ peuvent être représentées graphiquement de la façon suivante :



Les deux racines x_1 et x_2 de l'équation sont donc réelles et telles que :

$$0 \leq x_1 \leq \frac{1}{R} \leq 1 \leq x_2$$

L'égalité $x_1 = 1/R$ n'a lieu que pour $\alpha \eta \psi_0^2 \sigma^2 = 0$, c'est-à-dire pour le choix $\psi_0 = 0$. Dans ce cas on déduit de la propriété 2 que $\psi(B) = 0$ et que μ_t est de la forme $\mu_t = \lambda_1 R^t + \lambda_2$. Les deux actifs ont le même rendement asymptotique et sont non risqués. Il est clair que les idées de base qui ont conduit à la formulation ne sont pas respectées et la solution limite pour laquelle $\psi_0 = 0$ doit en pratique être rejetée.

Pour les autres choix du réel ψ_0 , les trajectoires ont un comportement asymptotique plus rapide que R^t . Ce phénomène d'« emballement » du prix p_t est souvent repris dans la littérature économique sous la dénomination « bulle spéculative » (voir Flood et Garber (1980), Diba et Grossman (1983)).

Le rapport entre les vitesses de croissance asymptotique du prix du bien risqué et du prix du bien non risqué est égal à :

$$f(\alpha \eta \psi_0^2 \sigma^2, R) = \frac{2}{1 + R + \alpha \eta \psi_0^2 \sigma^2 - \sqrt{(1 + R + \alpha \eta \psi_0^2 \sigma^2)^2 - 4R}}$$

C'est une fonction croissante de $\alpha \eta \psi_0^2 \sigma^2$ pouvant prendre toute valeur entre 1 et $+\infty$. Cette fonction permet d'étudier l'effet des coefficients structurels α , η , σ^2 et du paramètre ψ_0 sur l'« importance de la bulle ».

Le coefficient α liant la production excédentaire au prix courant, la mesure d'aversion pour le risque η , la variabilité σ^2 de la production excédentaire à la date t ont des effets positifs. Le coefficient ψ_0 s'interprète en termes d'amplitude de l'erreur de prévision relative au prix futur. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} V [p_{t+1} - E[p_{t+1} | I_t]] &= V [\psi_0 \tilde{\eta}_{t+1}] \\ &= \psi_0^2 \sigma^2 \end{aligned}$$

où σ^2 désigne la variance du processus exogène.

L'effet dû à la variation du paramètre auxiliaire ψ_0 est de même signe que les précédents.

Ainsi à coefficients structurels α , η , σ^2 donnés toutes les trajectoires n'accordent pas aux agents la même prime de risque.

Selon l'équilibre suivi par le système, la prime au risque peut varier considérablement en fonction de ψ_0 . Une explication intuitive de ce phénomène réside en le niveau de confiance que l'agent accorde à ses anticipations, ce niveau étant reflété par la valeur de ψ_0 . Ainsi, plus l'agent pense mal prévoir le prix ($|\psi_0|$ grand), plus ceci induit une croissance rapide de ce prix de manière à compenser un risque supposé grand. Observons qu'il s'agit ici d'une confiance que l'agent accorde à ses propres prévisions et non, comme pour le paramètre σ^2 , à la stabilité du milieu environnant.

En résumé, nous disposons de trois types de paramètres : d'une part les paramètres α et σ^2 décrivant la production excédentaire sur le marché de la consommation, ensuite le coefficient η donnant le comportement des spéculateurs vis-à-vis du risque et enfin le paramètre ψ_0 spécifique au marché spéculatif.

La dimension supplémentaire donnée par ce paramètre suggère aussi une interprétation liée au comportement des producteurs du bien considéré. En effet, on sait que, si ces producteurs sont organisés en cartel, on observe une stabilisation du prix tandis que, dans le cas contraire, on s'attend à des mouvements qui entraînent une plus grande incertitude dans la fixation du prix. Dans ce cas, il est naturel que les spéculateurs aient moins confiance en leurs anticipations. Si l'on suit ce raisonnement, on est tenté de voir en le paramètre ψ_0 un indicateur de la perception, par les spéculateurs, de la structure du marché.

Remarquons néanmoins qu'il ne s'agit que d'une interprétation possible. En effet, l'erreur de prévision des agents peut, de façon générale, être liée à diverses causes économiques qui dépassent le seul comportement des producteurs.

Dans la section précédente, nous avons insisté sur l'importance qu'il y a à ne pas fixer a priori la variance conditionnelle $V[p_{t+1}|I_t]$. Pour les solutions étudiées ici, où par stationnarité, cette variance est constante, il est important de noter que :

$$V[p_{t+1}|I_t] = \psi_0^2 \sigma^2$$

de sorte que, pour σ^2 donné, imposer à cette variance une valeur précise revient à sélectionner deux solutions particulières (correspondant à $|\psi_0|$ et $-|\psi_0|$).

Enfin, parmi les solutions considérées, certaines sont telles que le prix présent résume toute l'information utile pour prévoir le prix futur. Ces solutions sont trouvées en examinant la forme de la partie aléatoire $x_t = \psi(B)\tilde{\eta}_t$. La forme autorégressive de cette solution est $[\psi_0/\psi(B)]x_t = \psi_0\tilde{\eta}_t$ et il nous faut regarder pour quelles valeurs de ψ_0 , $\psi_0/\psi(B)$ est un polynôme de degré 1 en B . En vertu de la propriété 2, on a :

$$\frac{\psi_0}{\psi(B)} = \frac{1 - [1 + R + \alpha\eta\psi_0^2\sigma^2]B + RB^2}{1 - B + BA(B)\eta\psi_0\sigma^2}$$

Le dénominateur doit donc avoir un degré égal à 1, d'où pour respecter (9) ($\alpha_0 = 1$), $A(B) = 1$. Il ne peut ainsi y avoir de trajectoires pour lesquelles le prix présent reflète toute l'information que si le processus exogène prend des valeurs u_t temporellement indépendantes. Dans ce cas, nous avons :

$$\frac{\psi_0}{\psi(B)} = \frac{1 - [1 + R + \alpha\eta\psi_0^2\sigma^2]B + RB^2}{1 - B(1 - \eta\psi_0\sigma^2)}$$

Cette fraction se réduit à un polynôme de degré 1 en B si et seulement si $1/1 - \eta\psi_0\sigma^2$ est racine du numérateur, c'est-à-dire si :

$$(1 - \eta\psi_0\sigma^2)^2 - (1 - \eta\psi_0\sigma^2)(1 + R + \alpha\eta\psi_0^2\sigma^2) + R = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\sigma^2\psi_0[\psi_0^2\alpha\eta\sigma^2 + \psi_0(\eta\sigma^2 - \alpha) - R] = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\eta^2\sigma^4\psi_0\left\{\left(\psi_0 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\psi_0 - \frac{1}{\eta\sigma^2}\right) + R\right\} = 0.$$

La solution $\psi_0 = 0$ correspond au cas limite de deux biens non risqués.

Le facteur du second degré admet deux racines réelles lorsque la condition $(\alpha + \eta\sigma^2)^2/4\alpha\eta^2\sigma^2 > R$ est satisfaite. Si les coefficients structurels α , η et σ^2 vérifient cette inégalité, deux valeurs de ψ_0 , et donc deux solutions (distinctes du cas trivial $\psi_0 = 0$) correspondent à la situation où le prix présent transmet toute l'information disponible.

V — CAS DE PLUSIEURS AGENTS

Dans cette section, nous nous proposons d'examiner le cas où interviennent sur le marché diverses catégories d'agents, n'ayant pas la même aversion pour le risque et ne disposant pas de la même information.

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, la résolution de modèles non linéaires à anticipations rationnelles pose certains problèmes méthodologiques. Évidemment, l'introduction de divers ensembles d'informations complique significativement ces problèmes. En fait, lorsque les agents ne se distinguent que par leurs aversions au risque, on peut se ramener sans difficulté au modèle (7) présenté plus haut. La véritable complication provient exclusivement de l'introduction d'informations différenciées.

Afin d'obtenir une forme explicite des trajectoires admissibles pour le prix d'équilibre, nous serons amenés à faire certaines hypothèses relatives d'une part aux variances conditionnelles de p_{t+1} et d'autre part aux liens d'inclusion existant entre les divers ensembles d'informations.

Nous indiquons par i , $i = 1, \dots, n$, les diverses catégories d'agents. Notons β_i leurs importances respectives, η_i leurs aversions pour le risque et I_t^i les informations dont ils disposent. Le modèle devient :

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \frac{E(p_{t+1} | I_t^i) - R p_t}{\eta_i V(p_{t+1} | I_t^i)} = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{E(p_t | I_{t-1}^i) - R p_{t-1}}{\eta_i V(p_t | I_{t-1}^i)} + \alpha p_t + u_t \quad (11)$$

Dans la suite, nous supposons que les variances conditionnelles (qui sont des variables aléatoires) sont égales à leurs moyennes, les variances résiduelles :

$$Vr(p_t | I_{t-1}^i) = E[p_t - E(p_t | I_{t-1}^i)]^2$$

La transformation ainsi opérée simplifie la résolution du modèle tout en lui conservant un niveau de généralité largement supérieur à l'hypothèse selon laquelle cette variance est constante. De plus la variance conditionnelle coïncide avec la variance résiduelle notamment lorsque les ensembles d'informations sont engendrés par des bruits blancs indépendants et que l'on se restreint à des solutions à représentation moyenne mobile.

En ce qui concerne les ensembles I_t^i , nous supposons que les agents peuvent être ordonnés selon leurs niveaux d'information :

$$I_t^n \subset I_t^{n-1} \subset \dots \subset I_t^1, \forall t$$

Les agents de type n sont donc les moins informés tandis que les agents de type 1 dominent les autres au niveau de leur information. Afin de limiter l'avantage ainsi octroyé aux agents mieux informés, nous supposons aussi que, à la date $t + 1$, les agents les moins informés disposent au moins de l'information maximale de la date précédente :

$$I_t^1 \subset I_{t+1}^n, \forall t$$

Nous envisagerons, sous ces hypothèses, deux situations distinctes : d'une part, celle où tous les agents connaissent, à la date t , le prix présent p_t et la valeur de la variable exogène présente u_t , d'autre part, celle où la connaissance de u_t n'est plus assurée.

Dans le premier cas, nous avons le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ 3 : Lorsque $\forall t: (p_t, u_t) \in I_t^n \subset I_t^{n-1} \dots \subset I_t^1 \subset I_{t+1}^n$, les solutions du modèle (11) vérifient nécessairement l'équation :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\eta_i} \right) \frac{E(p_{t+1}|I_t^1) - R p_t}{V(p_{t+1}|I_t^1)} = \\ \left(\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\eta_i} \right) \frac{E(p_t|I_{t-1}^1) - R p_{t-1}}{V(p_t|I_{t-1}^1)} \\ + \alpha p_t + u_t \end{aligned} \quad (12)$$

Preuve

Prenons en effet l'espérance conditionnelle de l'équation (11) sachant I_t^2 . Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \beta_1 \frac{E(p_{t+1}|I_t^2) - R p_t}{\eta_1 V(p_{t+1}|I_t^1)} + \sum_{i=2}^n \beta_i \frac{E(p_{t+1}|I_t^i) - R p_t}{\eta_i V(p_{t+1}|I_t^i)} \\ = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{E(p_t|I_{t-1}^i) - R p_{t-1}}{\eta_i V(p_t|I_{t-1}^i)} + \alpha p_t + u_t \end{aligned}$$

Retranchant de l'équation initiale, nous voyons que :

$E(p_{t+1}|I_t^2) = E(p_{t+1}|I_t^1)$, donc aussi que : $V(p_{t+1}|I_t^2) = V(p_{t+1}|I_t^1)$, et l'équation (11) s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta_1}{\eta_1} + \frac{\beta_2}{\eta_2} \right) \frac{E(p_{t+1}|I_t^1) - R p_t}{V(p_{t+1}|I_t^1)} + \sum_{i=3}^n \beta_i \frac{E(p_{t+1}|I_t^i) - R p_t}{\eta_i V(p_{t+1}|I_t^i)} \\ = \left(\frac{\beta_1}{\eta_1} + \frac{\beta_2}{\eta_2} \right) \frac{E(p_t|I_{t-1}^1) - R p_{t-1}}{V(p_t|I_{t-1}^1)} + \\ \sum_{i=3}^n \beta_i \frac{E(p_t|I_{t-1}^i) - R p_{t-1}}{\eta_i V(p_t|I_{t-1}^i)} + \alpha p_t + u_t \end{aligned}$$

Il s'agit d'un modèle semblable à (11), où les deux premières catégories auraient été agrégées et disposeraient de la même information I^1 . Le poids global de cet agrégat est $\beta_1 + \beta_2$ et l'aversion pour le risque associée :

$$\left[\frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \left(\frac{\beta_1}{\eta_1} + \frac{\beta_2}{\eta_2} \right) \right]^{-1} = \eta_{1,2}$$

Le même raisonnement peut évidemment être poursuivi en prenant successivement les espérances conditionnelles sachant $I_t^3, I_t^4 \dots$ et permet de montrer l'égalité des diverses prévisions :

$$E(p_{t+1} | I_t^1) = E(p_{t+1} | I_t^2) = \dots = E(p_{t+1} | I_t^n) \quad \text{Q.E.D.}$$

La dernière ligne de cette démonstration met en évidence le phénomène suivant : *à l'équilibre, tous les agents forment les mêmes anticipations*, c'est-à-dire qu'ils forment leurs prévisions comme s'ils disposaient de l'ensemble d'information le plus complet I_t^1 . Il y a donc transmission d'information par l'intermédiaire du prix *et* de la variable exogène. On peut alors parler de marché efficient : les agents les mieux informés ne tirent aucun avantage de leur situation puisque cela ne leur permet pas d'améliorer leurs anticipations (c'est-à-dire de réduire la variance de leur erreur de prévision).

Ce résultat de transmission d'information par l'intermédiaire du prix d'équilibre n'est évidemment valable que si l'exogène u_t figure simultanément dans toutes les informations. Le résultat est généralement faux sous la seule condition :

$$p_t \in I_t^n \subset I_t^{n-1} \subset \dots \subset I_t^1 \subset I_{t+1}^n \dots$$

Afin de montrer cela, considérons le cas où deux agents distincts disposent des informations I_t^1 et I_t^2 telles que :

$$p_t \in I_t^2 \subset I_t^1 \subset I_{t+1}^2$$

et où seul le premier agent connaît la valeur présente de l'exogène :

$$u_t \in I_t^1, u_t \notin I_t^2$$

Le modèle (11) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \frac{E[p_{t+1} | I_t^1] - R p_t}{\eta_1 V(p_{t+1} | I_t^1)} + \frac{E[p_{t+1} | I_t^2] - R p_t}{\eta_2 V(p_{t+1} | I_t^2)} \\ &= \frac{E[p_t | I_{t-1}^1] - R p_{t-1}}{\eta_1 V(p_t | I_{t-1}^1)} + \frac{E[p_t | I_{t-1}^2] - R p_{t-1}}{\eta_2 V(p_t | I_{t-1}^2)} + \alpha p_t + u_t \end{aligned} \quad (13)$$

Prenant l'espérance conditionnelle à I_t^2 , et retranchant le résultat à (13), nous obtenons :

$$E[p_{t+1} | I_t^1] - E[p_{t+1} | I_t^2] = u_t - E[u_t | I_t^2]$$

Comme, par hypothèse, I_t^2 ne comporte pas la variable u_t , nous avons :

$$u_t - E[u_t | I_t^2] \neq 0$$

de sorte que :

$$E[p_{t+1} | I_t^1] \neq E[p_{t+1} | I_t^2]$$

Plus précisément, on observe que la différence entre les anticipations formées par les deux agents est égale à l'erreur commise par l'agent le moins informé dans l'estimation de la valeur de u_t . L'agent qui connaît u_t est donc avantagé au niveau de la précision de l'anticipation de p_{t+1} qu'il peut former.

De façon plus générale, on peut montrer que, pour autant qu'au moins un agent connaisse u_t , la différence entre les anticipations de p_{t+1} formées par deux agents (qu'ils connaissent ou non u_t) est donnée par :

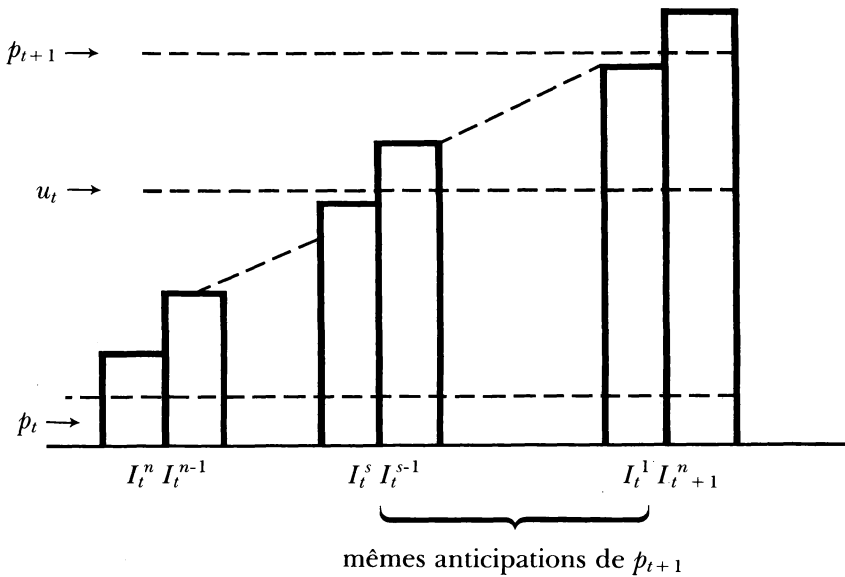
$$E[p_{t+1} | I_t^1] - E[p_{t+1} | I_t^2] = E[u_t | I_t^1] - E[u_t | I_t^2]$$

Il apparaît donc que, même lorsque tous les agents sont rationnels et qu'ils observent tous le prix présent, il n'y a pas automatiquement transmission d'information et donc efficience du marché. En d'autres termes, pour pouvoir profiter de cette transmission il convient de disposer d'un seuil inférieur d'information, ce seuil étant constitué de p_t et u_t .

La connaissance du prix présent p_t est généralement supposée pour tous les agents. La connaissance de u_t requiert une information supplémentaire, comme par exemple la valeur de l'offre excédentaire $Q_t - C_t$ (voir formule (6)).

Cela conduit à distinguer deux types d'agents : ceux qui bénéficient de la transmission d'information (car ils atteignent le seuil requis) et les autres. Une représentation du niveau d'information conduit au graphique suivant (p. 182) :

La scission entre deux groupes d'agents pourrait correspondre, en première approximation, à la distinction entre les « petits spéculateurs » non informés de la situation mondiale du marché et qui observent essentiellement le prix présent (et éventuellement quelques variables distinctes de u_t) et les « spécialistes » qui, connaissant u_t , se retrouvent en pratique tous dans la même situation par rapport au marché global. Dans ce cadre, la propriété 3 permet d'affirmer qu'une « information privilégiée » n'apporte en fait aucun avantage tangible aux « spécialistes ».



VI — CONCLUSION

Cet article peut être décomposé en deux parties. D'une part, au niveau méthodologique il présente une approche nouvelle de la résolution des modèles moyenne-variance comportant des anticipations rationnelles. D'autre part, il analyse les conséquences qui peuvent être déduites de cette résolution dans le cadre d'un modèle de stocks spéculatifs. L'interprétation des résultats permet de mettre en évidence certains phénomènes spécifiques à l'hypothèse d'anticipation rationnelle.

Du point de vue technique, la résolution de modèles non linéaires à anticipations rationnelles est quasiment absente de la littérature économique. En fait, une méthode numérique a été proposée par Fair et Taylor (1983). Des modèles de type moyenne-variance ont souvent été abordés (voir par exemple Grossman et Stiglitz (1980) et Hellwig (1982) dans un cadre financier). L'étude des solutions s'effectue alors soit en passant à un modèle linéaire (en supposant constante la variance conditionnelle du prix futur), soit en faisant appel à des conditions de transversalité inspirées par les travaux de Hansen et Sargent (1980, 1982) et Hansen et Singleton (1982), soit encore à une combinaison des deux arguments. Dans la mesure où les restrictions ainsi introduites ne semblent pas indispensables à la formulation du modèle, il nous a semblé préférable de conserver le cadre le plus général. La méthode de résolution utilisée permet de donner la forme des solutions à l'aide d'un processus arbitraire

qui n'est autre que l'erreur de prévision des spéculateurs. La généralité de cette approche suggère naturellement son extension à d'autres modèles non linéaires. De plus, comme le montre la propriété 3 de la section V, elle s'avère également applicable lorsque divers ensembles d'information sont introduits dans le modèle. Pour ces raisons, nous pensons que la méthode des processus de révision (Broze, Gouriéroux et Szafarz (1985)) devrait rendre possible l'étude des solutions de nombreux modèles financiers.

Dans le cadre du modèle considéré ici, nous avons mis en évidence les différents facteurs qui conduisent à la présence (et à l'amplification) de bulles spéculatives. Nous avons également abordé le problème de la transmission de l'information pouvant apparaître entre plusieurs spéculateurs possédant chacun un niveau d'information spécifique. Cela nous a conduit à détecter le seuil au-delà duquel tous les agents forment les mêmes anticipations. Ce n'est que lorsque tous atteignent ce seuil que le marché est efficient.

Évidemment, les conclusions ainsi résumées ne sont valides que dans le contexte présenté et sous les hypothèses mentionnées. Ainsi, nous avons, pour des raisons de simplicité, réduit à l'extrême la description du comportement des consommateurs et des producteurs. Un progrès important consisterait à affiner ce versant du modèle. En pratique, la méthode de résolution resterait utilisable mais la présence de nouvelles anticipations dans l'équation d'équilibre mènerait inévitablement à des lourdeurs d'écriture importantes. Il n'en reste pas moins que cela permettrait de mieux scinder les divers effets structurels agissant sur l'amplitude des bulles spéculatives. Dans un second temps on pourrait aussi s'interroger sur les liens existant entre les divers ensembles d'information, détenus tant par les producteurs que les spéculateurs. À ce niveau, il convient cependant de rappeler que les problèmes méthodologiques posés par la présence d'anticipations rationnelles rendent assez rapidement la résolution complexe voire impraticable.

BIBLIOGRAPHIE

- BROZE, L, GOURIEROUX, C. et A. SZAFARZ (1985), "Solutions of Dynamic Linear Rational Expectations Models", *Econometric Theory*, 1, pp. 341-368.
- DANTHINE, J.P. (1978), "Information, Future Prices and Stabilizing Speculation", *Journal of Economic Theory*, 17, pp. 79-98.
- DIAMOND, D.W. et R.E. VERRECHIA (1981), "Information Aggregation in a Noisy Rational Expectations Economy", *Journal of Financial Economics*, 9, pp. 221-235.
- DIBA, B.T. et H.I. GROSSMAN (1983), "Rational Asset Price Bubbles", Working Paper 1059, National Bureau of Economic Research.
- FAIR, R.C. et J.B. TAYLOR (1983), "Solution and Maximum Likelihood Estimation of Dynamic Non-Linear Rational Expectations Models", *Econometrica*, 51, pp. 1169-1184.
- FLOOD, R.P. et P.M. GARBER (1980), "Market Fundamentals versus Price-Level Bubbles: the First tests", *Journal of Political Economy*, 88, pp. 745-770.
- GROSSMAN, S.J. (1976), "On the Efficiency of Competitive Stock Markets where Traders have Diverse Information", *Journal of Finance*, 31, pp. 573-585.
- GROSSMAN, S.J. et J.E. STIGLITZ (1980), "On the Impossibility of Informationally Efficient Markets", *American Economic Review*, 70, pp. 393-408.
- HANSEN, L.P. et T.J. SARGENT (1980), "Formulating and Estimating Linear Rational Expectations Models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2, pp. 7-46.
- HANSEN, L.P. et T.J. SARGENT (1982), "Instrumental Variables Procedures for Estimating Linear Rational Expectations Models", *Journal of Monetary Economics*, 9, pp. 263-296.
- HANSEN, L.P. et K.J. SINGLETON (1982), "Generalized Instrumental Variables Estimation of Non-Linear Rational Expectations Models", *Econometrica*, 50, pp. 1269-1286.
- HELLWIG, M.F. (1982), "Rational Expectations Equilibrium with Conditioning on Past Prices: a Mean-Variance Example", *Journal of Economic Theory*, 26, pp. 279-312.
- KAWAI, M. (1983), "Price Volatility of Storable Commodities under Rational Expectations in Spot and Futures Markets", *International Economic Review*, 24, pp. 435-459.